Lösungen zu Übungsblatt 1

Aufgabe 1: "Large Extra Dimensions" & Planck-Länge

Die Newtonsche Gravitation ist hinreichend, um fundamentale Größen wie die Planck-Länge in diversen Dimensionen zu definieren. Die drei fundamentalen Naturkonstanten G (Newtonsche Gravitationskonstante), c (Lichtgeschwindigkeit) und $\hbar$ (Plancksches Wirkungsquantum) sind in vier Raumzeit-Dimensionen wie folgt bestimmt:

$$G = 6.67 \cdot 10^{-11} \frac{m^3}{kg\ s^2} \qquad c = 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s} \qquad \hbar = 1.06 \cdot 10^{-34} \frac{kg\ m^2}{s} \tag{1}$$

1. Die Newtonsche Gleichung für das Gravitationspotential $\phi_g^{(D)}$ in D Dimensionen lautet

$$\Delta \phi_g^{(D)} = 4\pi G^{(D)} \rho_m, \tag{2}$$

wobei ρ_m die Massendichte (Masse pro Volumen) beschreibt. Bestimmen Sie, ausgehend von dieser Gleichung, die Einheit/Dimension der D-dimensionalen Gravitationskonstanten $G^{(D)}$ relativ zur Gravitationskonstanten in vier Dimensionen. Beachten Sie, dass das Potential immer dieselbe Dimension hat:

$$[\phi_g^{(D)}] = \frac{[Energie]}{[Masse]} \tag{3}$$

Lösung:
Unabhängig von der Dimension gilt

$$[\phi_g^{(D)}] = \frac{[Energie]}{[Masse]} = \frac{J}{kg} \tag{4}$$

und daher

$$\Delta[\phi_g^{(D)}] = \frac{J}{kg\ m^2} = \frac{1}{s^2} \tag{5}$$

(die Ableitung trägt jeweils mit m^{-1} bei). Die Massendichte hat die dimensionsabhängige Einheit

$$[\rho_m^{(D)}] = \frac{[Masse]}{[Volumen]} = \frac{kg}{m^{D-1}} \tag{6}$$

(da die Raumzeit $(D-1)$ Raumdimensionen hat). Aus Gleichung (2) folgt also, dass $[G^{(D)}\rho_m] = \frac{1}{s^2}$ und daher

$$[G^{(D)}] = \frac{m^{D-1}}{kg\ s^2} \tag{7}$$

gelten muss. Speziell für $D = 4$:

$$[G^{(4)}] := [G] = \frac{m^3}{kg\ s^2}, \tag{8}$$

wie in Gleichung (1) gegeben. Damit bekommt man

$$[G^{(D)}] = m^{D-4}[D] \tag{9}$$

2. Im Planckschen Einheitensystem werden die drei Basiseinheiten *Länge, Zeit* und *Masse* so gewählt, dass die obigen drei fundamentalen Naturkonstanten den Wert eins annehmen, also in $D = 4$:

$$G = 1 \cdot \frac{l_P^3}{m_P\ t_P^2} \qquad c = 1 \cdot \frac{l_P}{t_P} \qquad \hbar = 1 \cdot \frac{m_P\ l_P^2}{t_P} \tag{10}$$

Die Planck'sche Länge ist die eindeutig bestimmte Länge, die sich aus Potenzen von G, c und $\hbar$ bilden lässt, also in $D = 4$:

$$l_P = \sqrt{\frac{G\hbar}{c^3}} = 1.61 \cdot 10^{-33} cm \tag{11}$$

Bestimmen Sie in analoger Weise die Planck-Länge in D Dimensionen und drücken Sie diese durch die vierdimensionale Planck-Länge l_P aus. Verwenden Sie das Ergebnis aus Aufgabenteil 1 für $G^{(D)}$.

Lösung:
Aus der in Teil 1 hergeleiteten Einheit für $G^{(D)}$ folgern wir

$$G^{(D)} = \frac{l_P^{D-1}}{t_P^2 m_P}. \tag{12}$$

Die Ausdrücke für c und $\hbar$ aus Gleichung (10) gelten auch in D Dimensionen. Damit berechnet man

$$G^{(D)} = \frac{l_P^{D-2} c^3}{\hbar}. \tag{13}$$

$$\Rightarrow l_P^{D-2} = \frac{G^{(D)}\hbar}{c^3} = \frac{G\hbar}{c^3}\frac{G^{(D)}}{G} = l_P^2 \frac{G^{(D)}}{G} \tag{14}$$

3. Nehmen Sie an, dass die $(D-4)$ Extradimensionen zu einem Torus kompaktifiziert sind. Am Beispiel einer konstanten Massenverteilung auf dem Torus im Ursprung der drei ausgedehnten räumlichen Dimensionen kann man leicht zeigen, dass die vierdimensionale und D-dimensionale Gravitationskonstante wie folgt zusammenhängen:

$$\frac{G^{(D)}}{G} = V_{extr.} = l_c^{D-4}, \tag{15}$$

wobei l_c die Länge der kompaktifizierten Dimensionen ist.

Bestimmen Sie damit und mit den Ergebnissen aus Teil 1 und 2 die Länge der Extradimensionen l_c für gegebene Planck-Längen l_P und $l_p^{(D)}$. Wie viele Extradimensionen benötigen Sie mindestens, um bei einer Planck-Länge [1] $l_P^{(D)} = 10^{-18}cm$ eine realistische Größe für l_c zu erhalten?

Lösung:
Aus Gleichung (14) lesen wir ab:

$$l_c^{D-4} = \frac{G^{(D)}}{G} = \frac{{l_P^{(D)}}^{D-2}}{l_P^2} \tag{16}$$

und mit den gegebenen Werten

$$l_c = \sqrt[D-4]{\frac{(10^{-18})^{D-2}}{(1.61 \cdot 10^{-33})^2}} cm \overset{!}{<} 10^{-2} cm \tag{17}$$

(da unterhalb $0.1mm$ das Gravitationsgesetz experimentell nicht getestet ist). Für $D = 6$ ergibt sich

$$l_c = 0.62 \cdot 10^{-3} cm, \tag{18}$$

also reichen zwei Extradimensionen bereits aus.

Aufabe 2: Noether-Ladungen

Zeigen Sie, dass die in der Vorlesung eingeführten Noether-Ladungen

$$P_\mu = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma \dot{X}_\mu \qquad\qquad J_{\mu\nu} = \frac{1}{2\pi\alpha'} \int d\sigma X_{[\mu} \dot{X}_{\nu]} \tag{19}$$

für geschlossene Strings erhalten sind. Für welche Randbedingungen sind diese Noether-Ladungen auch bei offenen Strings erhalten? Wie kann man diese Randbedingungen im Bezug auf die Weltflächen-Impulse interpretieren?

Lösung:
Erhaltung der Noetherladungen bedeutet in diesem Fall, dass die Ableitungen $\partial_\tau(P_\mu), \partial_\tau(J_{\mu\nu})$ verschwinden müssen. Für die Rechnung nehmen wir an, dass die Wellengleichung

$$\Box X_\mu = (\partial_\tau^2 - \partial_\sigma^2) X_\mu = 0 \tag{20}$$

[1] Aktuelle Beschleunigerexperimente können Abstände bis zu $10^{-16}cm$ auflösen. Hierbei wurden bisher keine Anzeichen für Extradimensionen gefunden.

((2.19) im Skript) erfüllt ist. Wir benutzen die Abkürzung $T := \frac{1}{2\pi\alpha'}$ und berechenen

$$\begin{aligned}
\partial_\tau P_\mu &= \partial_\tau \left(T \int d\sigma \dot{X}_\mu \right) \\
&= T \int_0^{2\pi} d\sigma \ddot{X}_\mu \\
&= T \int_0^{2\pi} d\sigma \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} X_\mu \quad \text{(Einsetzen der Wellengleichung)} \\
&= T \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} X_\mu \right) \Big|_0^{2\pi} \\
&= 0 \qquad (21)
\end{aligned}$$

Die Integrationsgrenzen ergeben sich aus der Tatsache, dass es sich um geschlossene Strings handelt. Wegen Periodizität $X_\mu(\tau,\sigma) = X_\mu(\tau, \sigma + 2\pi)$ ist das Integral null.

$$\begin{aligned}
\partial_\tau J_\mu &= \partial_\tau \left(T \int d\sigma X_{[\mu} \dot{X}_{\nu]} \right) \\
&= T \int_0^{2\pi} d\sigma (\underbrace{\dot{X}_{[\mu} \dot{X}_{\nu]}}_{=0 \text{ (Symmetrie)}} + X_{[\mu} \ddot{X}_{\nu]}) \\
&= T \int_0^{2\pi} d\sigma X_{[\mu} \partial_\sigma^2 X_{\nu]} \quad \text{(Wellengleichung)} \\
&= T (\underbrace{X_{[\mu} \partial_\sigma X_{\nu]} |_0^{2\pi}}_{=0 \text{ (Periodizität)}} - \underbrace{\int_0^{2\pi} d\sigma \partial_\sigma X_{[\mu} \partial_\sigma X_{\nu]}}_{=0 \text{ (Symmetrie)}}) \\
&= 0 \qquad (22)
\end{aligned}$$

Für offene Strings: Wegen der Parametrisierung offener Strings laufen die Integrationsgrenzen jetzt von 0 bis π. Eine ähnliche Rechnung liefert

$$\begin{aligned}
\partial_\tau P_\mu &= T \int_0^{\pi} d\sigma \ddot{X}_\mu \\
&= T \int_0^{\pi} d\sigma \frac{\partial^2}{\partial \sigma^2} X_\mu \\
&= T \left(\frac{\partial}{\partial \sigma} X_\mu \right) \Big|_0^{\pi} \\
&= T \left(\partial_\sigma X_\mu(\tau, \pi) - \partial_\sigma X_\mu(\tau, 0) \right) \\
&\stackrel{!}{=} 0 \qquad (23)
\end{aligned}$$

Da die beiden Stringenden voneinander unabhängig sind, folgt

$$\partial_\sigma X_\mu(\tau, \pi) \stackrel{!}{=} 0 \qquad \text{und} \qquad \partial_\sigma X_\mu(\tau, 0) \stackrel{!}{=} 0 \qquad (24)$$

Interpretation: Kein Impulsfluss in σ-Richtung vom Rand des Worldsheets (der Impuls des Strings ist erhalten).

$$\begin{aligned}\partial_\tau J_\mu &= T\int_0^\pi d\sigma(\underbrace{\dot{X}_{[\mu}\dot{X}_{\nu]}}_{=0}+X_{[\mu}\ddot{X}_{\nu]})\\ &= T(X_{[\mu}\partial_\sigma X_{\nu]}|_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}d\sigma\,\underbrace{\partial_\sigma X_{[\mu}\partial_\sigma X_{\nu]}}_{=0})\\ &= T(X_{[\mu}(\tau,\pi)\partial_\sigma X_{\nu]}(\tau,\pi)-X_{[\mu}(\tau,0)\partial_\sigma X_{\nu]}(\tau,0))\\ &\stackrel{!}{=} 0 \end{aligned} \tag{25}$$

Das ist wiederum erfüllt, wenn die Ableitungen in σ-Richtung an beiden Enden des Strings verschwinden (siehe Gleichung (24)).

Aufgabe 3: Konforme Transformationen

Charakterisieren Sie die Transformationsparameter, welche die konforme Eichfixierung respektieren. Diese Parameter erfüllen die Gleichung

$$\delta_\epsilon h_{\alpha\beta}|_{h=\lambda\eta} = (\delta\lambda)\eta_{\alpha\beta}. \tag{26}$$

Zeigen Sie zuerst, dass diese Transformationen die Beziehung

$$\partial_\alpha\epsilon_\beta + \partial_\beta\epsilon_\alpha = \partial\cdot\epsilon\ \eta_{\alpha\beta} \tag{27}$$

erzwingen. Verifizieren Sie, dass dies in Lichtkegelkoordinaten ($\epsilon^\pm = \epsilon^0 \pm \epsilon^1$) auf die Bedingungen $\partial_+\epsilon^- = 0 = \partial_-\epsilon^+$ führt, also

$$\epsilon^+ = \epsilon^+(\xi^+) \qquad\qquad \epsilon^- = \epsilon^-(\xi^-) \tag{28}$$

Lösung:
Eine infinitesimale Koordinatentransformation der Form $\xi^\alpha \mapsto \xi^\alpha - \epsilon^\alpha(\xi)$ induziert

$$-\delta_\epsilon h^{\alpha\beta} = -\epsilon^\gamma\partial_\gamma h^{\alpha\beta} + \partial_\gamma\epsilon^\beta h^{\alpha\gamma} + \partial_\gamma\epsilon^\alpha h^{\gamma\beta} \tag{29}$$

(Skript Gleichung (2.13)). Setzt man in dieser Gleichung $h = \lambda\eta$, nimmt Bedingung (26) folgende Form an:

$$\begin{aligned}\delta_\epsilon h^{\alpha\beta}|_{h=\lambda\eta} &= \epsilon^\gamma\partial_\gamma\lambda\eta^{\alpha\beta} - \partial_\gamma\epsilon^\beta\lambda\eta^{\alpha\gamma} - \partial_\gamma\epsilon^\alpha\lambda\eta^{\gamma\beta}\\ &= \epsilon^\gamma(\partial_\gamma\lambda)\eta^{\alpha\beta} - \lambda(\partial^\alpha\epsilon^\beta + \partial^\beta\epsilon^\alpha)\\ &= (\delta\lambda)\eta^{\alpha\beta}\end{aligned} \tag{30}$$

Hier wurde die Worldsheet-Metrik $\eta_{\alpha\beta}$ benutzt, um Indizes rauf- und runterzuziehen. Wir definieren das Skalarprodukt bzgl. Worldsheet-Metrik als

$$a\cdot b = a_\alpha b^\alpha = a_\alpha b_\beta\eta^{\alpha\beta}. \tag{31}$$

Multipliziert man Gleichung (30) von rechts mit $\eta_{\alpha\beta}$ (bzw. bildet die Spur), erhält man

$$2(\epsilon\cdot\partial)\lambda - 2\lambda\partial\cdot\epsilon = 2(\delta\lambda) \tag{32}$$

Wieder einsetzen in Gleichung (30) liefert

$$\begin{aligned} (\delta\lambda)\eta^{\alpha\beta} &= (\delta\lambda + \lambda\partial\cdot\epsilon)\eta^{\alpha\beta} - \lambda(\partial^\alpha\epsilon^\beta + \partial^\beta\epsilon^\alpha) \\ \Leftrightarrow \partial\cdot\epsilon\ \eta^{\alpha\beta} &= \partial^\alpha\epsilon^\beta + \partial^\beta\epsilon^\alpha \end{aligned} \tag{33}$$

Zieht man jetzt alle Indizes nach unten, ist das die gesuchte Beziehung.

Um Gleichung (27) in Lichtkegelkoordinaten auszudrücken, schreiben wir ∂_α und ϵ_α als Funktionen der Lichtkegelkoordinaten

$$\partial_0 = \partial_+ + \partial_- \qquad \epsilon_0 = \epsilon_+ + \epsilon_- \tag{34}$$

$$\partial_1 = \partial_+ - \partial_- \qquad \epsilon_1 = \epsilon_+ - \epsilon_- \tag{35}$$

und setzen in Gleichung (27) ein. Das gibt drei Bedingungen (für $\alpha = \beta = 0, \alpha = \beta = 1$, sowie $\alpha = 0, \beta = 1$). Mit $\partial\cdot\epsilon = \partial_-\epsilon^- + \partial_+\epsilon^+$ erhalten wir

$$\left.\begin{aligned} 2\partial_0\epsilon_0 = 2(\partial_+ + \partial_-)(\epsilon_+ + \epsilon_-) = -\partial\cdot\epsilon \\ 2\partial_1\epsilon_1 = 2(\partial_+ - \partial_-)(\epsilon_+ - \epsilon_-) = \partial\cdot\epsilon \end{aligned}\right\} \Rightarrow \partial_+\epsilon^- + \partial_-\epsilon^+ = 0 \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \partial_0\epsilon_1 + \partial_1\epsilon_0 = (\partial_+ + \partial_-)(\epsilon_+ - \epsilon_-) + (\partial_+ - \partial_-)(\epsilon_+ + \epsilon_-) = 0 \\ \Rightarrow \partial_+\epsilon^- - \partial_-\epsilon^+ = 0 \end{aligned} \tag{37}$$

Hier wurden Indizes mit der Metrik in Lichtkegelkoordinaten

$$\eta_{\pm\pm} = 0 \qquad \eta_{\pm\mp} = -\frac{1}{2} \tag{38}$$

rauf- und runtergezogen. Daraus ergibt sich $\partial_+\epsilon^- = \partial_-\epsilon^+$.